Thermodynamique et mécanique des fluides – Chapitre 6

Description d'un fluide en écoulement stationnaire – TD

Exercice 1 : Débit de la Loire

Le débit volumique moyen de la Loire au niveau d'Orléans est $D_\mathrm{V} = 400\,\mathrm{m}^3\cdot\mathrm{s}^{-1}$, avec une vitesse moyenne $v = 1\,\mathrm{m}\cdot\mathrm{s}^{-1}$.

1. Déterminer le débit massique moyen.

2. Sachant que la profondeur moyenne du fleuve est $h = 2\,\mathrm{m}$, estimer sa largeur moyenne L au niveau d'Orléans.

Correction :

1. En supposant l'écoulement incompressible et de masse volumique $\rho = 1000\,\mathrm{kg}\cdot\mathrm{m}^{-3}$, on en déduit le débit massique : $D_\mathrm{m} = \rho\, D_\mathrm{V} = 4{,}00.10^5\,\mathrm{kg}\cdot\mathrm{s}^{-1}$.

2. En supposant l'écoulement uniforme, on a : $D_\mathrm{V} = v\,S = v\,h\,L$, d'où : $L = \dfrac{D_\mathrm{V}}{v\,h} = 2.10^2\,\mathrm{m}$.

Exercice 2 : Modélisation de la houle

On peut modéliser la houle qui se propage à la surface de la mer selon l'axe x par un champ de vitesse :

$$\vec{v}(x,z,t) = V_0\,\mathrm{e}^{k\,z}\left[\cos\left(k\,x-\omega\,t\right)\vec{e}_x + \sin\left(k\,x-\omega\,t\right)\vec{e}_z\right]$$

avec z l'axe vertical ascendant dont l'origine correspond au niveau moyen de la mer, ω la pulsation de l'onde, et $k = \dfrac{2\,\pi}{\lambda}$ où λ est la longueur d'onde.

1. Représenter l'allure du champ de vitesse à l'instant $t = 0$ dans les plans $x = 0$, $x = \dfrac{\lambda}{4}$ et $x = \dfrac{\lambda}{2}$.

On peut montrer qu'un écoulement est incompressible s'il vérifie la relation :

$$\mathrm{div}\,\vec{v} = 0.$$

2. Cet écoulement est-il incompressible ?

3. Calculer la vorticité de l'écoulement qui est définie telle que :

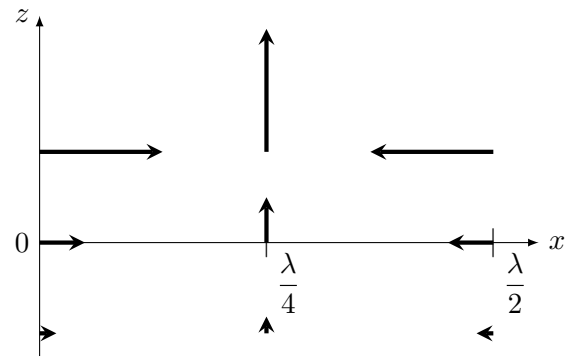
$$\vec{\Omega} = \frac{1}{2}\,\overrightarrow{\mathrm{rot}}\,\vec{v}.$$

Correction :

1. À l'instant $t = 0$, on exprime :

- en $x = 0$: $\vec{v} = V_0\,\mathrm{e}^{k\,z}\,\vec{e}_x$;
- en $x = \dfrac{\lambda}{4}$: $\vec{v} = V_0\,\mathrm{e}^{k\,z}\,\vec{e}_z$;
- en $x = \dfrac{\lambda}{2}$: $\vec{v} = -V_0\,\mathrm{e}^{k\,z}\,\vec{e}_x$.

On représente alors l'allure du champ de vitesse :



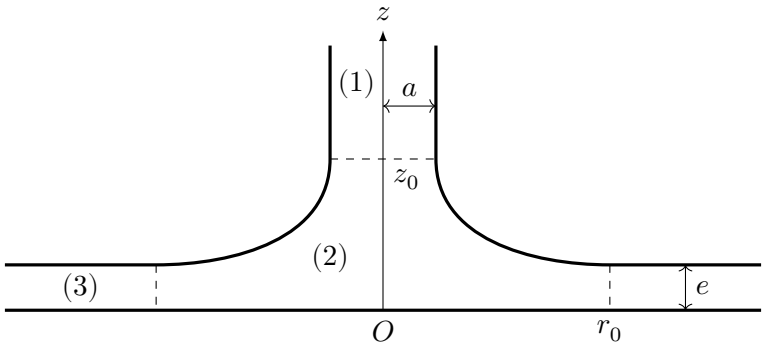
2. On calcule : $\operatorname{div}\vec{v} = \dfrac{\partial v_x}{\partial x} + \dfrac{\partial v_y}{\partial y} + \dfrac{\partial v_z}{\partial z} = -V_0\,k\,\mathrm{e}^{k\,z}\sin(k\,x-\omega\,t) + 0 + V_0\,k\,\mathrm{e}^{k\,z}\sin(k\,x-\omega\,t) = 0$, donc on en déduit que l'écoulement est incompressible.

3. On calcule : $\overrightarrow{\Omega} = \dfrac{1}{2}\,\overrightarrow{\operatorname{rot}}\,\vec{v} = \dfrac{1}{2}\left[\dfrac{\partial v_x}{\partial z} - \dfrac{\partial v_z}{\partial x}\right]\vec{e}_y = \dfrac{1}{2}\left[V_0\,k\,\mathrm{e}^{k\,z}\cos(k\,x-\omega\,t) - V_0\,k\,\mathrm{e}^{k\,z}\cos(k\,x-\omega\,t)\right]\vec{e}_y = \vec{0}$.

Exercice 3 : Canalisation à symétrie cylindrique

On considère un écoulement d'air dans une canalisation à symétrie cylindrique d'axe (Oz) constituée de 3 parties :

- un tuyau vertical cylindrique (1) de rayon a et d'axe (Oz) ;
- une jonction (2) de hauteur z_0 et de largeur r_0 ;
- un espace (3) entre deux plaques horizontales espacées d'une distance e.



On suppose que l'air est un fluide parfait en écoulement stationnaire et incompressible. En supposant également que $a \ll z_0$ et $e \ll r_0$, le champ des vitesses peut s'exprimer en coordonnées cylindriques :

- $\vec{v}_1 = -v_0\,\vec{e}_z$ dans la partie (1) avec v_0 une constante positive ;
- $\vec{v}_2 = A\,r\,\vec{e}_r + B\,z\,\vec{e}_z$ dans la partie (2) avec A et B des constantes ;
- $\vec{v}_3 = v_3(r)\,\vec{e}_r$ dans la partie (3).

On s'intéresse tout d'abord à l'écoulement dans la partie (1).

1. Exprimer le débit volumique à travers une section du tuyau.

On s'intéresse maintenant à l'écoulement dans la partie (3).

2. Exprimer le débit volumique à travers une section où r est constant en fonction de e, r et $v_3(r)$.

3. En déduire l'expression de $v_3(r)$.

On s'intéresse enfin à l'écoulement dans la partie (2).

4. La vitesse étant continue entre les différentes parties, déterminer l'expression des constantes A et B.

5. En déduire l'expression de $\vec{v}_2$.

Correction :

1. Le débit volumique s'exprime : $D_\mathrm{V} = \displaystyle\iint_S \vec{v}_1 \cdot \mathrm{d}\overrightarrow{S} = \iint_S v_0\,\mathrm{d}S = v_0\,\pi\,a^2$.

2. Le débit volumique s'exprime : $D_\mathrm{V} = \displaystyle\iint_S \vec{v}_3 \cdot \mathrm{d}\overrightarrow{S} = \iint_S v_3(r)\,\mathrm{d}S = v_3(r)\,2\,\pi\,r\,e$.

3. Par conservation du débit volumique entre les parties (1) et (3), on en déduit que : $v_0\,\pi\,a^2 = v_3(r)\,2\,\pi\,r\,e$, d'où : $v_3(r) = \dfrac{v_0\,a^2}{2\,r\,e}$.

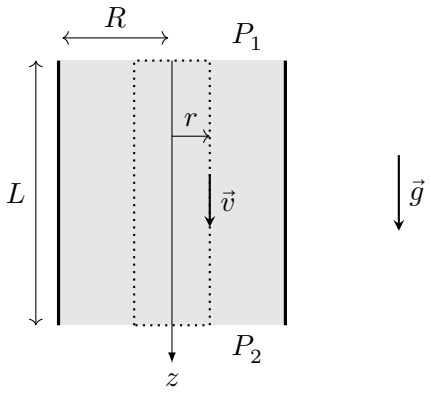
4. Par continuité de la vitesse en $z = z_0$, on a : $\vec{v}_2(r, z_0) = \vec{v}_1$, avec $\vec{v}_2(r, z_0) \approx B\,z_0\,\vec{e}_z$ comme $r \ll z_0$, d'où on en déduit : $-v_0 = B\,z_0$, soit : $B = -\dfrac{v_0}{z_0}$.

Par continuité de la vitesse en $r = r_0$, on a : $\vec{v}_2(r_0, z) = \vec{v}_3(r)$, avec $\vec{v}_2(r_0, z) \approx A\,r_0\,\vec{e}_r$ comme $e \ll r_0$, d'où on en déduit : $\dfrac{a^2\,v_0}{2\,r_0\,e} = A\,r_0$, soit : $A = \dfrac{a^2\,v_0}{2\,r_0^2\,e}$.

5. On en déduit : $\vec{v}_2 = \dfrac{a^2\,v_0}{2\,r_0^2\,e}\,r\,\vec{e}_r - \dfrac{v_0}{z_0}\,z\,\vec{e}_z$.

Exercice 4 : Écoulement de Poiseuille dans une conduite verticale

On considère un fluide incompressible de masse volumique ρ et de viscosité dynamique η en écoulement stationnaire dans une conduite cylindrique verticale d'axe descendant (Oz) de rayon R et de longueur L. On note P_1 la pression en haut de la conduite et P_2 la pression en bas de la conduite, avec $P_1 > P_2$. On suppose que le champ de vitesse du fluide s'écrit sous la forme $\vec{v} = v(r)\,\vec{e}_z$.



Le système étudié est le cylindre de rayon r et de longueur L, représenté en pointillés sur la figure ci-dessus. Il est soumis à une force surfacique de viscosité dont la norme s'exprime :

$$f_\text{s} = \eta\left|\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}r}\right|.$$

1. Quelle est la vitesse du fluide en contact avec la paroi de la conduite ? En déduire le signe de $\dfrac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}r}$.

2. Sachant que la résultante des forces extérieures qui s'exercent sur le système étudié est nulle pour cet écoulement stationnaire, déterminer l'expression de $v(r)$.

3. Représenter le profil de vitesse dans la conduite.

4. Déterminer l'expression du débit volumique D_V à travers une section de la conduite.

Correction :

1. La vitesse du fluide visqueux en contact avec la paroi de la conduite est nulle.

Comme $v(r < R) > 0$ dans la conduite et $v(r = R) = 0$, on en déduit que $\dfrac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}r} < 0$.

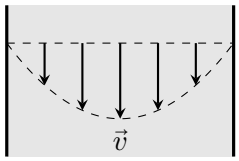
2. Il s'exerce 3 forces sur le cylindre de rayon r :

- son poids : $\overrightarrow{P} = m\,g\,\vec{e}_z = \rho\,\pi\,r^2\,L\,g\,\vec{e}_z$;
- la force de pression en haut : $\overrightarrow{F_1} = P_1\,\pi\,r^2\,\vec{e}_z$;
- la force de pression en bas : $\overrightarrow{F_2} = -P_2\,\pi\,r^2\,\vec{e}_z$;
- la force de viscosité qui s'exerce sur la surface latérale du cylindre et qui s'oppose à l'écoulement du fluide : $\overrightarrow{F_\text{v}} = -f_\text{s}\,S_\text{lat}\,\vec{e}_z = \eta\,\dfrac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}r}\,2\,\pi\,r\,L\,\vec{e}_z$ (comme $\dfrac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}r} < 0$).

Sachant que la résultante des forces extérieures est nulle, on obtient : $\overrightarrow{P} + \overrightarrow{F_1} + \overrightarrow{F_2} + \overrightarrow{F_\text{v}} = \vec{0}$, soit en projetant : $\rho\,\pi\,r^2\,L\,g + P_1\,\pi\,r^2 - P_2\,\pi\,r^2 + \eta\,\dfrac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}r}\,2\,\pi\,r\,L = 0$, d'où : $\dfrac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}r} = \dfrac{P_2 - P_1 - \rho\,L\,g}{2\,L\,\eta}\,r$. On obtient

en intégrant : $v(r) = \dfrac{P_2 - P_1 - \rho\, L\, g}{2\, L\, \eta}\, \dfrac{r^2}{2} + K$, avec K une constante que l'on détermine à l'aide de la condition à la limite $v(r = R) = 0 = \dfrac{P_2 - P_1 - \rho\, L\, g}{2\, L\, \eta}\, \dfrac{R^2}{2} + K$, d'où : $K = -\dfrac{P_2 - P_1 - \rho\, L\, g}{2\, L\, \eta}\, \dfrac{R^2}{2}$, et on en déduit finalement : $v(r) = \dfrac{(P_2 - P_1 - \rho\, L\, g)\,(r^2 - R^2)}{4\, L\, \eta}$.

3. On représente le profil de vitesse dans la conduite :



4. Le débit volumique à travers une section de la conduite s'exprime : $D_\mathrm{V} = \iint_S \vec{v}\cdot \mathrm{d}\vec{S} = \displaystyle\int_{r=0}^{R}\int_{\theta=0}^{2\,\pi} \frac{(P_2 - P_1 - \rho\, L\, g)\,(r^2 - R^2)}{4\, L\, \eta}\, r\, \mathrm{d}r\, \mathrm{d}\theta = \frac{(P_2 - P_1 - \rho\, L\, g)}{4\, L\, \eta} \int_{r=0}^{R} (r^2 - R^2)\, r\, \mathrm{d}r \int_{\theta=0}^{2\,\pi} \mathrm{d}\theta$, soit : $D_\mathrm{V} = \dfrac{(P_2 - P_1 - \rho\, L\, g)}{4\, L\, \eta} \left[\dfrac{r^4}{4} - R^2\, \dfrac{r^2}{2}\right]_0^R [\theta]_0^{2\,\pi} = -\dfrac{(P_2 - P_1 - \rho\, L\, g)\, \pi\, R^4}{8\, L\, \eta}$.

Exercice 5 : Mesure de la viscosité dynamique d'un fluide

Un récipient cylindrique vertical de diamètre $D = 50\,\mathrm{mm}$ est rempli d'un fluide visqueux et incompressible de masse volumique $\rho = 1{,}0\,\mathrm{g\cdot cm^{-3}}$. Il se vide progressivement à travers un tube horizontal de diamètre $d = 1{,}0\,\mathrm{mm}$ et de longueur $L = 40\,\mathrm{cm}$ relié à sa base. On admet que le débit volumique dans le tube vérifie la loi de Poiseuille :

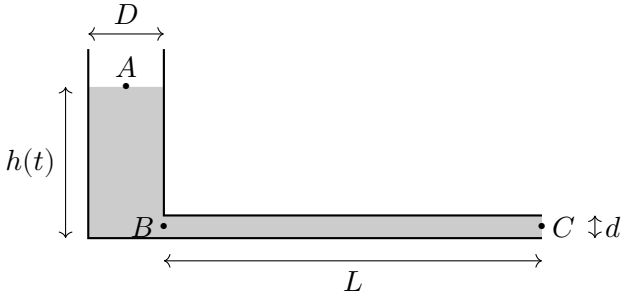
$$D_\mathrm{V} = \frac{\pi\, d^4}{128\, \eta}\, \frac{\Delta P}{L}$$

avec ΔP la différence de pression entre les deux extrémités du tube, et η la viscosité dynamique du fluide.

1. Sachant que le récipient s'est vidé de moitié en 38 min, déterminer la viscosité dynamique du fluide.

Correction :

1. On schématise la situation ci-dessous.



La différence de pression entre les deux extrémités du tube est : $\Delta P = P_B - P_C$, avec $P_B = P_A + \rho\, g\, h(t)$ en supposant que le fluide visqueux s'écoule suffisamment lentement dans le récipient pour appliquer la relation de la statique des fluides, et $P_C = P_A = P_\mathrm{atm}$, soit : $\Delta P = \rho\, g\, h(t)$, d'où l'expression du débit volumique : $D_\mathrm{V} = \dfrac{\pi\, d^4}{128\, \eta}\, \dfrac{\rho\, g\, h(t)}{L}$.

On peut également exprimer le débit volumique au point A : $D_\mathrm{V} = v_A\, \pi \left(\dfrac{D}{2}\right)^2$, avec $v_A = -\dfrac{\mathrm{d}h}{\mathrm{d}t}$ comme $v_A > 0$ dans l'expression du débit, d'où : $D_\mathrm{V} = -\dfrac{\pi\, D^2}{4}\, \dfrac{\mathrm{d}h}{\mathrm{d}t}$.

En égalisant les deux expressions du débit, on obtient : $-\dfrac{\pi\, D^2}{4}\, \dfrac{\mathrm{d}h}{\mathrm{d}t} = \dfrac{\pi\, d^4}{128\, \eta}\, \dfrac{\rho\, g\, h(t)}{L}$, d'où l'équation différentielle : $\dfrac{\mathrm{d}h}{\mathrm{d}t} + \dfrac{d^4\, \rho\, g}{32\, \eta\, L\, D^2}\, h(t) = 0$.

La solution est de la forme : $h(t) = h_0\, \mathrm{e}^{-t/\tau}$, avec $\tau = \dfrac{32\, \eta\, L\, D^2}{d^4\, \rho\, g}$ et h_0 la hauteur à l'instant initial.

Après une durée $\Delta t = 38\,\text{min}$, on sait que : $h(\Delta t) = \dfrac{h_0}{2}$, soit : $h_0\,\mathrm{e}^{-\Delta t/\tau} = \dfrac{h_0}{2}$, d'où : $\tau = \dfrac{\Delta t}{\ln 2}$.

On en déduit finalement la viscosité dynamique du fluide : $\eta = \dfrac{d^4\,\rho\,g}{32\,L\,D^2}\,\tau = \dfrac{d^4\,\rho\,g}{32\,L\,D^2}\,\dfrac{\Delta t}{\ln 2} = 1{,}0.10^{-3}\,\text{Pa·s}$, elle correspond à la viscosité de l'eau.